České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická
Katedra telekomunikační techniky

7.přednáška

Kryptosystémy veřejného klíče II

Ing. Tomáš Vaněk, Ph.D. tomas.vanek@fel.cvut.cz

Obsah

- EC nad R
- EC nad polem F_p
- EC polem F_{2^m}
- ECC – Elliptic Curve Cryptosystems
  - ECDH
- Algoritmy „Suite B“

EC - úvod

- **eliptická křivka ≠ elipsa**
- eliptické křivky byly objeveny při výpočtech obvodů elips
- tyto výpočty vedly na eliptický integrál ve tvaru:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} \text{ , kde } \quad g_2, g_3 \in C$$

- zkoumáním vlastností eliptických křivek se nejvíce zabýval přední německý matematik 19. století Karl Theodor Wilhelm Weierstrass
- Název eliptické vznikl proto, že kubické rovinné funkce se v minulosti používaly k výpočtu obvodu elipsy (eliptický integrál).
- V roce 1985 přišli Victor Miller a Neal Koblitz na možnost použití eliptických křivek v rámci kryptosystému veřejného klíče (ECC).

EC nad reálnými čísly

Eliptickou křivka nad množinou reálných čísel je obecně definována jako množina bodů ve tvaru:

$$\mathrm{E}:\ y^2z + a_1xyz + a_3yz^2 = x^3 + a_2x^2z + a_4xz^2 + a_6z^3$$

- Weierstrassův tvar EC

Pokud bod P(x:y:z) je na bod křivce a $z \neq 0$, pak lze

$x' := \frac{x}{z}$ a $y' := \frac{y}{z}$

Bod $P'(x', y')$ je řešením rovnice

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

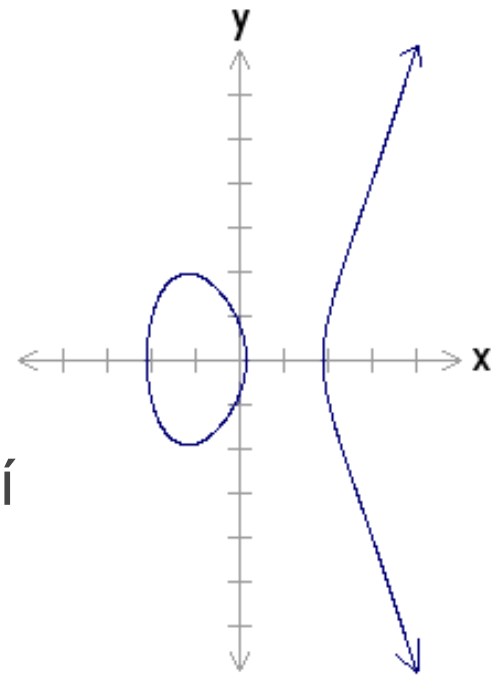
- afinní Weierstrassův tvar EC

EC nad reálnými čísly

Každou křivku lze dále převést do zkrácené Weierstrassovy formy - $E\colon y^2 = x^3 + ax + b$

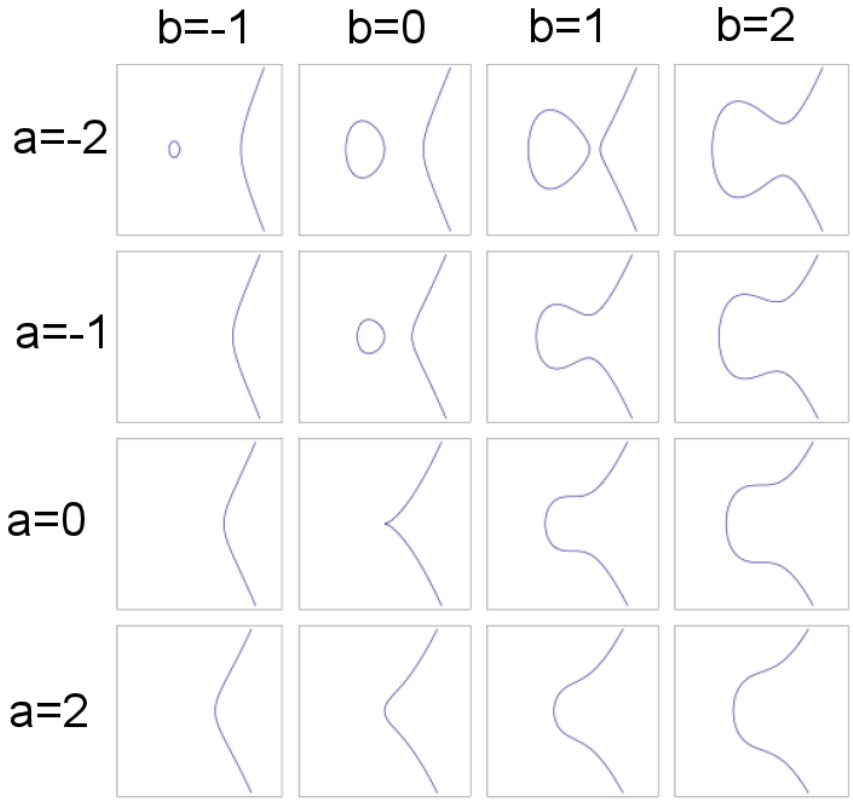
Eliptická křivka je pak jednoznačně určena volbou koeficientů *a*,*b*.

Na příklad pro *a*= -*4* a *b*=*0,67* dostaneme eliptickou křivku popsanou rovnicí

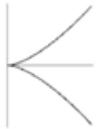


$$y^2 = x^3 - 4x + 0{,}67$$

Graf EC na množinou R



uzlová singularita



hrotová singularita

EC nad reálnými čísly

- Eliptická křivka může tvořit grupu, pokud není singulární, tzn. člen x^3+ax+b je nerozložitelný, neboli pokud platí, že $4a^3+27b^2 \neq 0$
- Grupa na EC nad reálnými čísly se skládá z bodů odpovídajících bodům na eliptické křivce a z jednoho speciálního bodu – O nazvaného „bod v nekonečnu“.
- Bod O plní funkci nulového prvku.
- Grupy na eliptických křivkách jsou aditivní - základní definovanou operací je „sčítání“.
- Početní operace jsou definovány geometricky.
- Tato operace nemá s normálním sčítáním tak, jak ho známe mnoho společného !

EC nad reálnými čísly

- Inverzním bodem k bodu $P = (x_P, y_P)$ je jeho zrcadlový obraz podle osy x, $-P = (x_P, -y_P)$.
- Každý bod $-P$, inverzní k bodu P ležícím na eliptické křivce, leží také na téže eliptické křivce.
- Operace s eliptickými křivkami můžeme popsat dvěma způsoby:
  - geometricky
    - vhodný k výkladu pro svou názornost, ale nehodí se k výpočtům
  - algebraicky
    - není příliš názorný, ale je vhodný k výpočtům

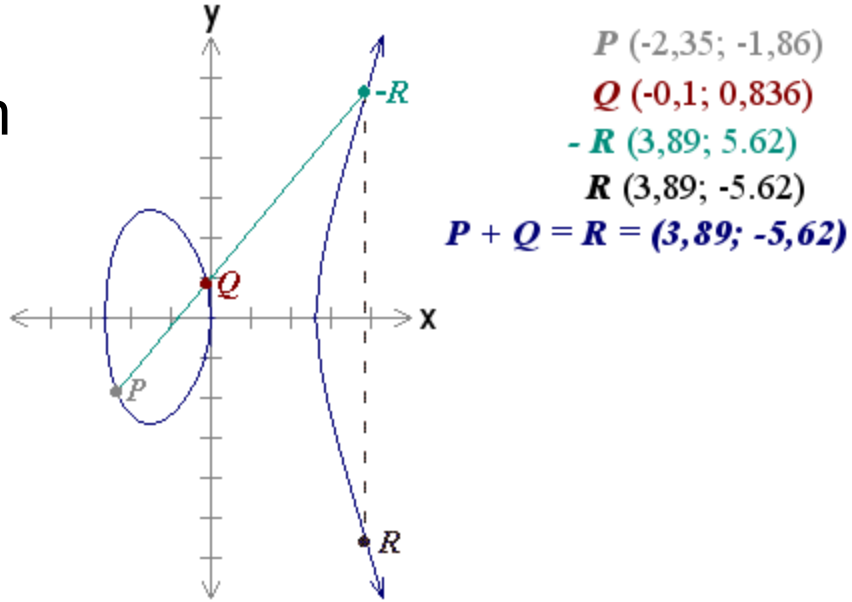
EC – sčítání bodů P,Q – geometrický přístup

Nechť $P=(x_p,y_p)$, $Q=(q_x,q_y)$, $P \neq Q$ leží na společné EC.

Součet bodů P, Q probíhá ve dvou krocích.

1) sestrojíme přímku procházející body P, Q, která protne eliptickou křivku právě v jednom bodě, který nazveme -R.

2) bod -R je zrcadlovým obrazem bodu R podle osy x



Operace sčítání v grupě na eliptické křivce se zapisuje:

P + Q = R.

EC – sčítání bodů P,Q – albegraický přístup

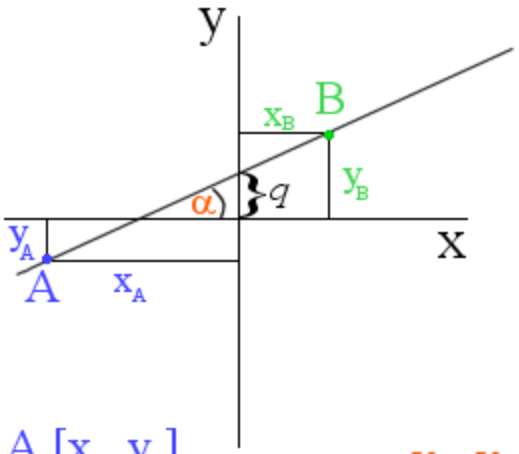
Nechť $P = (x_P, y_P)$ a $Q = (x_q, y_q)$ takové že, $P \neq Q$, pak součet $P + Q = R$, kde $R = (r_x, r_y)$

$$x_r = s^2 - x_p - x_q \qquad y_r = s(x_p - x_r) - y_p$$

$$s = \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q}$$

EC – odvození rovnic pro sčítání bodů P a Q

- vyjdeme z geometrického vyjádření
- přímka procházející body P,Q je popsána analytickou rovnicí ve tvaru $Y = sX + q$, kde s je směrnice přímky a q je y-ová hodnota souřadnice v bodě protínajícím osu y (x=0)
- směrnice s vyjadřuje sklon přímky vůči souřadné soustavě



$$s = tg\alpha = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

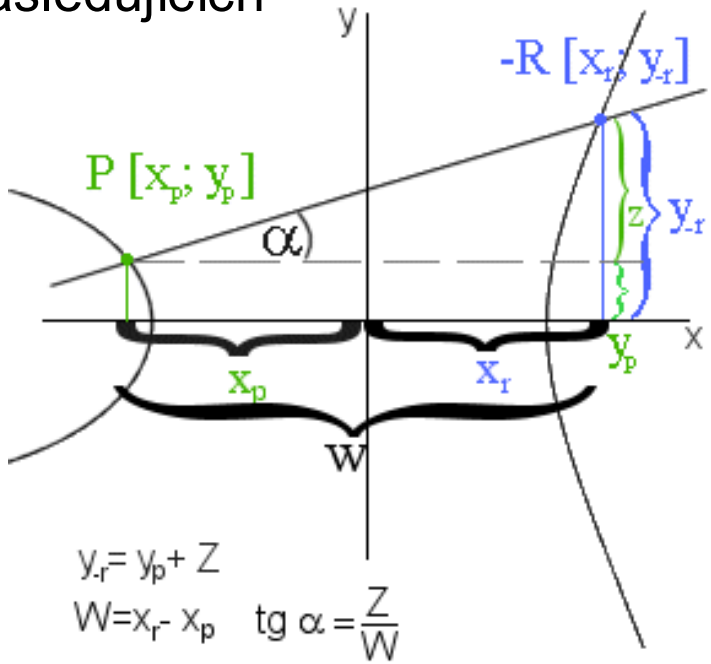
A $[x_A, y_A]$
B $[x_B, y_B]$

$$tg\,\alpha = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

EC – odvození rovnic pro sčítání bodů P a Q

- Přímka protíná křivku právě ve třech bodech. Jsou to body P,Q a –R.
- Protože R a –R jsou zrcadlové podle osy x, tak jejich x-ové souřadnice se rovnají ($x_R = x_{-R}$). Proto má bod –R v následujících výpočtech souřadnice $-R=(x_R;y_{-R})$.

Jak je patrné na obrázku , tak



$$y_{-R} = y_P + Z$$

$$tg\ \alpha = \frac{Z}{W} = s$$

$$W = x_r - x_p$$

Po dosazení a vyjádření Z dostaneme rovnici $y_{-R} = y_P + s \cdot (x_R - x_P)$ To je rovnice pro y-ovou složku bodu –R. vynásobit –1 a dostaneme hledaný vztah pro y-ou složku bodu R $y_R = -y_P - s \cdot (x_R - x_P)$

EC – Sčítání bodů P a –P

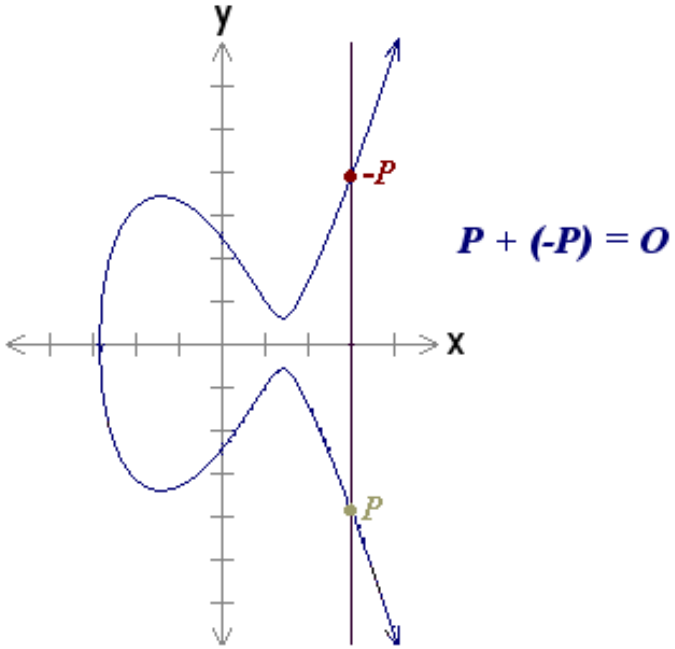
Přímka vedená skrz body P a -P je kolmá na osu *x* a neprotíná eliptickou křivku v žádném dalším bodu, a sčítání bodů P, -P není možné provést stejně jako v předchozím případě. Pro tento případ obsahuje grupa na eliptické křivce bod O - „bod v nekonečnu“.

$$P + (-P) = O.$$

V grupě eliptické křivky platí, že $P + O = P$.

O je identickým prvkem pro sčítání v grupě na EC.

Všechny EC mají identický prvek O pro operaci sčítání.



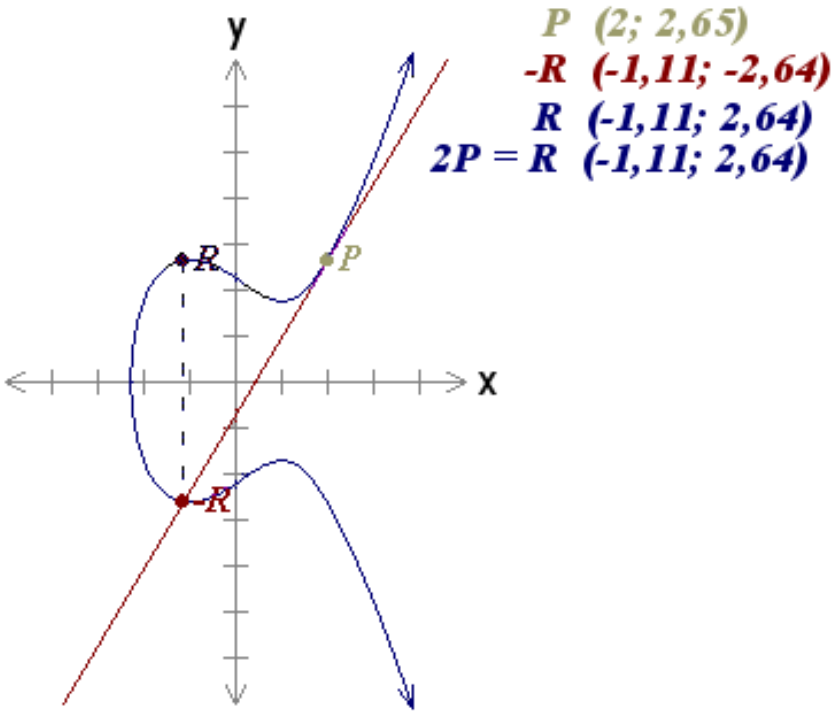
EC – zdvojení bodu P - geometrický přístup

Při součtu bodu P k sobě samému, se tečna ke křivce dotýká bodu P.

Pokud $y_P \neq 0$, pak tečna protíná EC právě v jednom bodu, -R.

-R je zrcadlový obraz R podle osy *x*. Tato operace se nazývá zdvojení bodu P.

P + P = 2P = R.



EC – zdvojení bodu P pokud y_p=0

Pokud bod P = (x_P,y_P) je takový, že $y_P \neq 0$, pak tečna k P je kolmá na osu x a neprotíná eliptickou křivku v žádném dalším bodu.

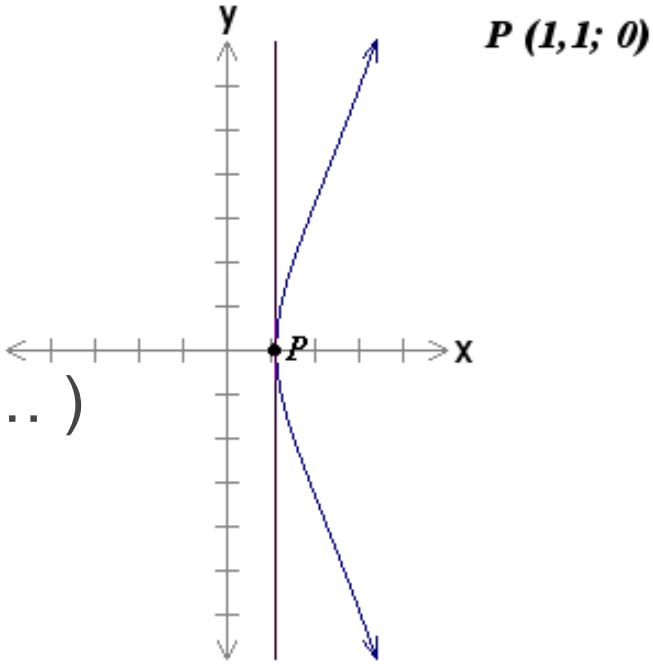
Podle definice 2P = O pro každý takový bod P.

Bod 3P dostaneme součtem bodu 2P a P. Výsledkem je bod P, protože:

P + O = P.

Tedy 3P = P.

(a tak dále 4P=O, 5P=P, 6P=O, 7P=P, …)



EC nad konečnými poli

- Výpočty nad množinou reálných čísel jsou pomalé a díky zaokrouhlovacím chybám i nepřesné.
- Kryptografické aplikace vyžadují rychlé a přesné výpočty, proto se v praxi používají grupy na eliptických křivkách nad konečnými poli typu F_P a F_{2^m}.
- Konečný počet prvků grupy je nutnou vlastností grup používaných v kryptografii.

- Eliptickou křivku nad podložním polem F_P je možné definovat jako množinu bodů *(x,y)* vyhovujících rovnici

$$y^2 \bmod p = x^3 + ax + b \bmod p$$ (p je prvočíslo)

- Prvky pole F_p jsou čísla zbytkové třídy mod p. Počítá se s nimi stejně jako s EC nad $\boldsymbol{R}$, pouze přibude mod p.

EC nad konečnými poli

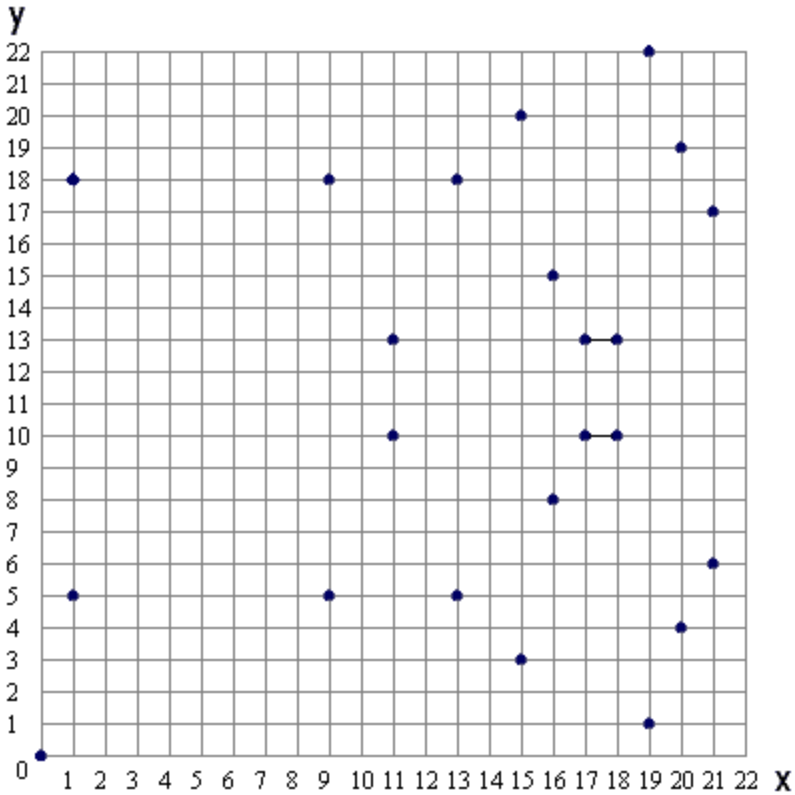
- Aby bylo možné na eliptické křivce nad F_P vytvořit grupu, je nutné aby člen $x^3 + ax + b$ byl nerozložitelný nebo, což je ekvivalentní, aby $4a^3 + 27b^2 \neq 0$
- Grupa na EC nad F_P, obsahuje
  - body odpovídající eliptické
  - speciální bod O - „bod v nekonečnu“
- EC nad F_P je tvořena konečným počtem bodů

- $\#E(F_P)$ řád křivky – celkový počet bodů tvořících EC + O
- n - řád bodu – nejmenší číslo n, pro které platí $n \cdot P = O$
- generátor - prvek EC, jehož mocninami lze vyjádřit libovolný prvek EC
- kofaktor – podíl řádu EC a prvočíselného dělitele

EC nad konečným polem typu Fp - PŘÍKLAD

Graf EC popsané rovnicí $y^2 = x^3 + x$

Graf není spojitý, protože křivku nad F_P tvoří jen konečný počet bodů.



Například bod (9,5) vyhovuje této rovnici protože:

$y^2 \bmod p = x^3 + x \bmod p$

$5^2 \bmod 23 = 9^3 + 9 \bmod 23$

$25 \bmod 23 = 738 \bmod 23$

$2 = 2$

EC nad konečným polem typu Fp – násobení bodu

- realizováno dvěma základními operacemi
  - zdvojení bodu
  - sčítání bodů
- skalární násobení bodu P $Q = k \cdot P = \overbrace{P + P + P \ldots + P}^{k-krát}$

  $P, Q \in E \quad k \in Z^+$
- lze urychlit pomocí zdvojování – DAA („double and add“)

Příklad: Dány souřadnice bodu P, k =23. Určete Q

$$Q = k \cdot P = 23 \cdot P = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot P) + P) + P) + P$$

EC nad konečným polem typu Fp

Příklad: Mějme křivku E nad polem Fp a bod P ležící na ní. Provádějme opakované sčítání bodu P k bodu P.

2P=P+P

3P=2P+P

…

- Libovolný bod Q vzniklý z takovéhoto výpočtu lze vyjádřit jako $Q=nP$, kde n udává počet sčítání.
- EC nad F_p má konečný počet bodů, takže po určité době se začne posloupnost vzniklých bodů opakovat (zacyklí se)
- Existuje takové n, pro které $nP=O$
- Nejmenší n, pro které platí $nP = O$, se nazývá řád bodu P.

EC nad konečným polem typu Fp

- Řád bodu dělí řád křivky (počet bodů EC - #E)
- Různé body na EC mají různý řád.
- V praxi vybíráme takový bod P, jehož řád je roven největšímu prvočíslu v rozkladu čísla #E (pro *n* velké např. 2^{192}, dostaneme velmi dlouhou posloupnost, než dojde k „zacyklení“) nebo jeho násobku (tzv. kofaktor)

EC nad konečným polem typu F_2^m

- Prvky pole F_2^m jsou polynomy o stupni menším než m.
- Prvky pole typu F_2^m jsou binární řetězce (vektory) délky m.
- Číslo **m** se nazývá **řád** pole.
- Koeficienty polynomů jsou v F_2, to znamená, že nabývají hodnot 0 nebo 1. Prvky pole je také možno popsat vektorovém ve tvaru.
- Protože při výpočtech v F_2^m pracujeme s binárními řetězci, je pole tohoto typu velmi vhodné k počítačovému zpracování.
- Eliptická křivka vytvořená nad polem typu F_2^m je určena výběrem dvou parametrů a, b z množiny F_2^m ($b \neq 0$)

EC nad konečným polem typu F_2^m

Kvůli tomu, že prvky pole mají binární formu, rovnice EC má tvar:

$$y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b$$

Eliptickou křivku tvoří body (*x*,*y*) vyhovující rovnici eliptické křivky nad F_2^m, kde *x* a *y* jsou prvky F_2^m.

Grupa na eliptické křivce nad podložním polem F_2^m obsahuje body odpovídající eliptické křivce a speciální bod O – „bod v nekonečnu“.

Eliptická křivka nad F_2^m je tvořena konečným počtem bodů.

Sčítání na EC nad konečným polem typu F_2^m

Příklad: Mějme dva polynomy $A = x^3+x^2+1$ and $B = x^2+x$.
Součet polynomů $A+B = x^3+2x^2+x+1$. Protože koeficienty jsou v mod 2, výsledek je $A+B= x^3+x+1$.

- Tentýž příklad s použitím vektorů pro zápis polynomů:
  $A = 1101_2$ $B = 0110_2$ $A + B = 1011_2$

- Protože koeficienty prvků pole jsou v F_2, sčítání prvků a, b v poli F_2^m ($a+b=c \bmod 2$) lze zjednodušit na $a \oplus b = c$

Závěr: Sčítání v poli F_2^m se realizuje operací XOR.

Odčítání na EC nad konečným polem typu F_2^m

- Protože sčítání se realizuje operací XOR platí, že :
  všechny prvky pole F_2^m jsou svojí vlastní aditivní inverzí protože:
  $(a_{m-1}a_{m-2}a_{m-3}\ldots a_1a_0) + (a_{m-1}a_{m-2}a_{m-3}\ldots a_1a_0) = (000\ldots00)$

- Rovnice vyjadřuje tzv. aditivní identitu.
- Odčítání se definováno jako přičítání aditivní inverze.
- Protože platí aditivní identita jsou operace sčítání a odčítání nad F_2^m ekvivalentní.

Závěr: Sčítání i odčítání se realizuje operací XOR

EC nad konečným polem typu F_{2^m}

- Při násobení polynomů stupně nižšího než *m* může vzniknout polynom stupně vyššího než *m*
- Redukční (nedělitelný) polynom $f(x)$ stupně m pomocí operace mod f(x) zajistí, že výsledek operací bude ležet v F_{2^m}
- V kryptografii se využívají:
  - trinomiály ve tvaru $x^m + x^k + 1,\ 1 \leq k \leq m-1$
  - pentomiály ve $x^m + x^a + x^b + x^c + 1$, kde $1 \leq c < b < a \leq m - 1$

- Redukční polynom $f(x)$ je každý polynom, který odpovídá triominálnímu nebo pentominálnímu tvaru a pro který platí, že je nad polem F_{2^m} nerozložitelný, tj. nelze ho vyjádřit jako součin dvou polynomů o stupni nižším než m

EC nad konečným polem typu F_2^m

Pravidla pro aritmetické operace v F_2^m mohou být definovány různými způsoby. Norma ANSI X9.62 popisuje dvě báze:

- **polynomiální bází**
  není tak efektivní jako ONB
  polynomiální báze byla popsána na předchozích slidech
- **optimální normální bází (ONB)**
  speciální typ Gaussovy normální báze
  velmi efektivní
  nevhodné pro pochopení principů…

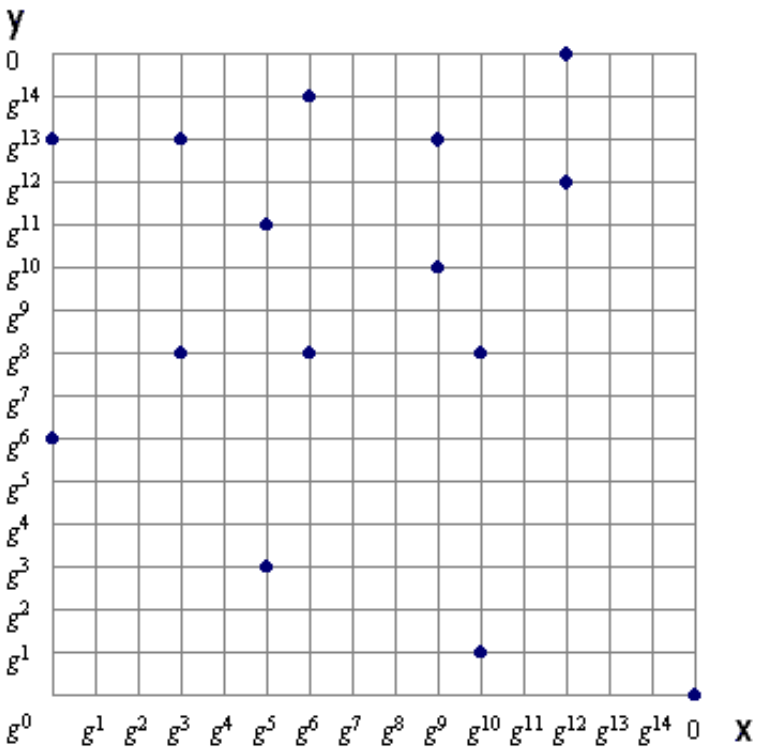
Hlavní rozdíl spočívá v definici násobení mezi prvky pole.

Operace nad binárním tělesem F_2^m s polynomiální bází jsou také základem algoritmu AES.

EC nad konečným polem typu F_2^m - PŘÍKLAD

Ukázka eliptické křivky nad polem F_2^4 s polynomiální reprezentací popsaná rovnicí $y^2 + xy = y^3 + g^4x^2 + g^0$

Pro jednodušší zápis jsou souřadnice bodů zapisovány s využitím generátoru.



EC nad konečným polem typu F_2^m

- Grupy na eliptických křivkách nad F_2^m mají konečný počet bodů a aritmetické operace s nimi nevykazují žádné zaokrouhlovací chyby.

- Tyto vlastnosti spojené s binární povahou pole vedou k tomu, že početní operace mohou být velmi efektivně implementovány počítačem.

Doménové parametry pro EC

- kromě parametrů *a,b* se komunikující strany musí dohodnout na dalších parametrech
- doménové (systémové) parametry
- různé pro F_p a F_{2^m}
- volba parametrů popsána v doporučení:
  Standards for Efficient Cryptography, *SEC 2: Recommended Elliptic Curve Domain Parameters, Version 1.0, September 2000,* http://www.secg.org/download/aid-386/sec2_final.pdf

Doménové parametry pro EC nad poli typu F_p

- **p** – prvočíslo definující podložní pole F_p
- **a,b** – parametry definující konkrétní eliptickou křivku ve tvaru $y^2 \bmod p = x^3 + ax + b \bmod p$
- **g** – generátor; bod (x_g, y_g) ležící na EC
- **n** – řád křivky
- **h** – kofaktor $h = \frac{\#E(F_p)}{n}$

$\#E(F_p)$ … počet bodů EC sestrojené nad polem F_p

Typické hodnoty pro EC typu F_p

- Křivky nad poli typu F_p jsou vhodné pro SW implementace
- Hodnoty p doporučené v FIPS PUB186-2
  - $p = 2^{192} - 2^{64} - 1$
  - $p = 2^{192} - 2^{64} - 1$
  - $p = 2^{224} - 2^{96} - 1$
  - $p = 2^{256} - 2^{224} + 2^{192} + 2^{96} - 1$
  - $p = 2^{384} - 2^{128} - 2^{96} + 2^{32} - 1$
  - $p = 2^{521} - 1$

Prvočísla v tomto tvaru umožňují efektivní modulární redukci. Parametry a,b křivek definované v doporučení NISTu mají $a \equiv -3 \; mod \; p$ a b voleno pseudonáhodně pomocí SHA-1

Typické hodnoty pro EC typu F_{2^m}

Příklad křivky nad F_p:

```
p = 2^192 -2^64 -1
a = -3
b = 0x 64210519 E59C80E7 0FA7E9AB 72243049 FEB8DEEC C146B9B1
n = 0x FFFFFFFF FFFFFFFF FFFFFFFF 99DEF836 146BC9B1 B4D22831
```

- Křivky nad poli typu F_{2^m} jsou vhodné pro HW implementace
- Hodnoty m doporučené v FIPS PUB186-2
  - m = 163
  - m = 233
  - m = 283
  - m = 409
  - m = 571

Doménové parametry pro EC nad poli typu F_{2^m}

- **m** – řád pole, celé číslo definující konečné binární pole F_{2^m}
- **f(x)** – nedělitelný polynom stupně ***m***
- **a, b** – parametry definující konkrétní EC ve tvaru

$$y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b$$

- **g** – generátor v poli F_{2^m};bod (x_g, y_g) ležící na EC
- **n** – řád křivky (při násobení se násobí číslem <0;n-1>
- **h** - kofaktor $h = \frac{\#E(F_{2^m})}{n}$

Problém diskrétního logaritmu na EC

Praktické kryptografické algoritmy využívající EC jsou postaveny na nemožnosti řešení ECDLP problému

Definice ECDLP: Mějme eliptickou křivku E řádu n definovanou nad polem F_p *a* bod *Q* ležící na *E*.

Určete celé číslo *k* takové, že $Q=k \cdot P$, $0 \leq k \leq n-1$

Číslo *k* je diskrétní logaritmus *Q* o základu *P* na křivce *E*.

V kryptosystémech je *Q* veřejný klíč a *k* soukromý klíč.

*V*elikost ***k*** musí zabránit výpočtu diskrétního logaritmu postupným násobením.

Problém diskrétního logaritmu na EC

- Pro malé řády ***k*** bodu P je problém jednoduchý, pro velké řády (typicky 2^{160}) je ECDLP neřešitelný v polynomiálním čase

- Pro danou velikost pole (typicky pole F_2^{160} ….. 2^{160} prvků) je nesmírně obtížné zjistit *k* ze znalosti dvojice $k \cdot P$ a P.

- O problému ECDLP se předpokládá, že je odolný vůči útokům typu NFS (Number Field Sieve).

- Dnes nejefektivnějším známým útokem je Pollardova ρ-metoda se složitostí přibližně $O\left(\frac{\sqrt{\pi n}}{2}\right)$ kroků, kde *n* je počet prvků pole.

Praktické otázky k implementaci ECC

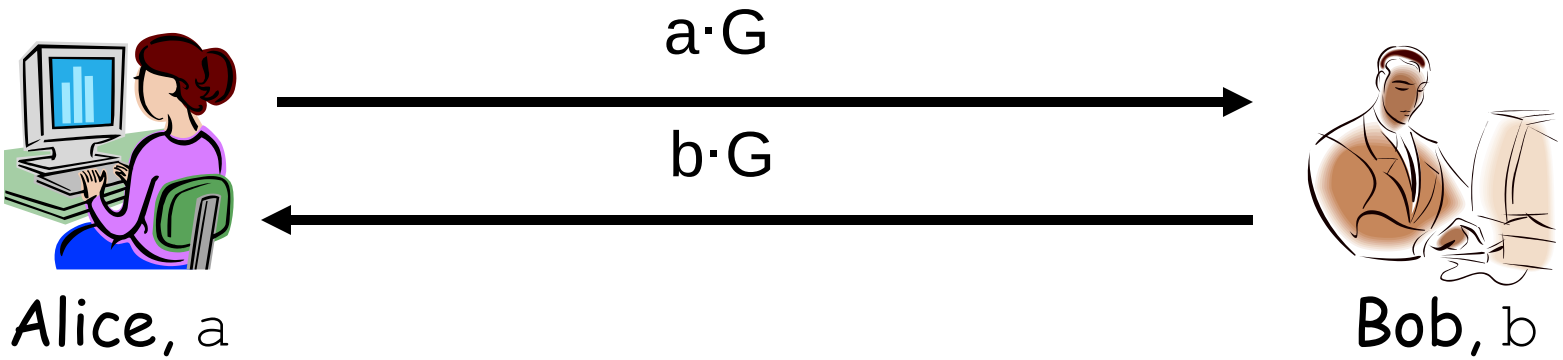
- Časově nejnáročnější operace s ECC je skalární násobení
- Při implementaci je potřeba se rozhodnout:
  - jak bude realizováno násobení
  - jak budou reprezentovány souřadnice bodů na EC
- Na těchto parametrech výrazně závisí efektivita celého systému

ECDH (Elliptic Curve Diffie-Hellman)

- algoritmus analogický s klasickým Diffie-Hellmanovým algoritmem
- umožňuje komunikujícím stranám získat sdílenou tajnou informaci použitelnou např. jako klíč pro klasickou symetrickou šifru

ECDH (Elliptic Curve Diffie-Hellman)

- **Veřejný klíč:** G (bod na eliptické křivce)
- **Tajný klíč:** pro Alici číslo a, pro Boba číslo b



- Alice spočítá $a \cdot (b \cdot G)$
- Bob spočítá $b \cdot (a \cdot G)$
- $K = a \cdot (b \cdot G) = b \cdot (a \cdot G)$ je možné použít jako klíč pro symetrickou šifru; K – souřadnice jiného bodu na křivce
- potencionální útočník může zachytit pouze G,aG, bG

Srovnání s ostatními kryptosystémy

Základní srovnávací hlediska:

Efektivita

- **Výpočetní režie** - počet výpočetních operací nutných k šifrování a dešifrování
- **Velikost klíče nebo podpisu** - jaký objem (počet bitů) zabírají veřejný a soukromý klíč a systémové parametry
- **Šířka pásma** - jaký objem dat je nutný k přenesení zašifrované zprávy nebo podpisu

Bezpečnost – který z problémů je těžší ?

IFP x **DLP** x **ECDLP**

Efektivita – výpočetní režie

ECC jsou při šifrování zhruba

- 10x rychlejší než IFP(RSA) a DLP (DSA) algoritmy
- použití krátkého veřejného exponentu urychlí RSA na úroveň ECC
- krátký veřejný exponent RSA nemá vliv na dobu dešifrování nebo generování podpisu

Efektivita – velikosti klíčů a systémových parametrů

Srovnání kryptosystémů se srovnatelnou úrovní zabezpečení

- Systémové parametry u IFP(RSA) nejsou
- Systémové parametry u ECC jsou: pole F_p, dva koeficienty *a,b* určující křivku, generátor *G* ležící na EC a řád generátoru *n*.
- Systémové parametry u DSA jsou: prvočíslo *q*, prvočíslo *p* takové že *q* dělí *p-1*, generátor *g.*

Algoritmus	Systémové parametry [b]	Veřejný klíč [b]	Soukromý klíč [b]
RSA	n/a	1088*	2048*
DSA	2208	1024	160
ECC	481	161	160

* modul + veřejný/tajný exponent (veřejný zvolen krátký kvůli urychlení)

Bezpečnost – srovnání IFP, DLP a ECDLP

IFP

- **Pollardova** ρ, p-1, p+1 metoda
- **NFS** (Number Field Sieve)
- **TWINKLE, TWIRL** (zatím jen teoretické návrhy)
  - optická zařízení urychlující (100-1000x) počáteční fázi prohledávání možných řešení. Po skončení se pokračuje s klasickým NFS. Stroj v ceně několika desítek miliónů dolarů umožní prolomení jednoho klíče RSA s délkou modulu 1024 bitů za 1 rok.
- kvantové počítače (zatím jen teoreticky)
  - podařilo se sestrojit KP, který faktorizoval číslo 15

Bezpečnost – srovnání IFP, DLP a ECDLP

DLP

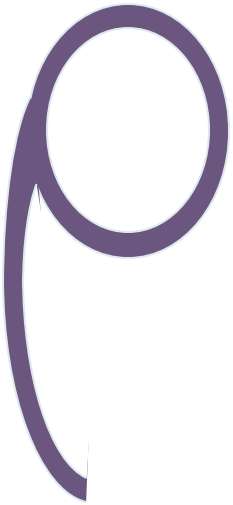
Obdobné metody jako u kryptosystémů na bázi IFP a navíc několik specifických útoků na DLP:

- Index-Calculus
- Pollardova ρ a λ metoda pro DL
- Pohlingův-Hellmanův algoritmus

Bezpečnost – srovnání IFP, DLP a ECDLP

ECDLP

- nejefektivnější známá metoda – Pollardova ρ
- časová složitost $O(\sqrt{\frac{\pi n}{2}})$ kroků (n je typicky 2^{160} a více !!!)
- výhoda - malá pamětová složitost
- lze paralelizovat – při použití *m* strojů je složitost $O(\frac{\sqrt{\frac{\pi n}{2}}}{m})$



Bezpečnost – srovnání IFP, DLP a ECDLP

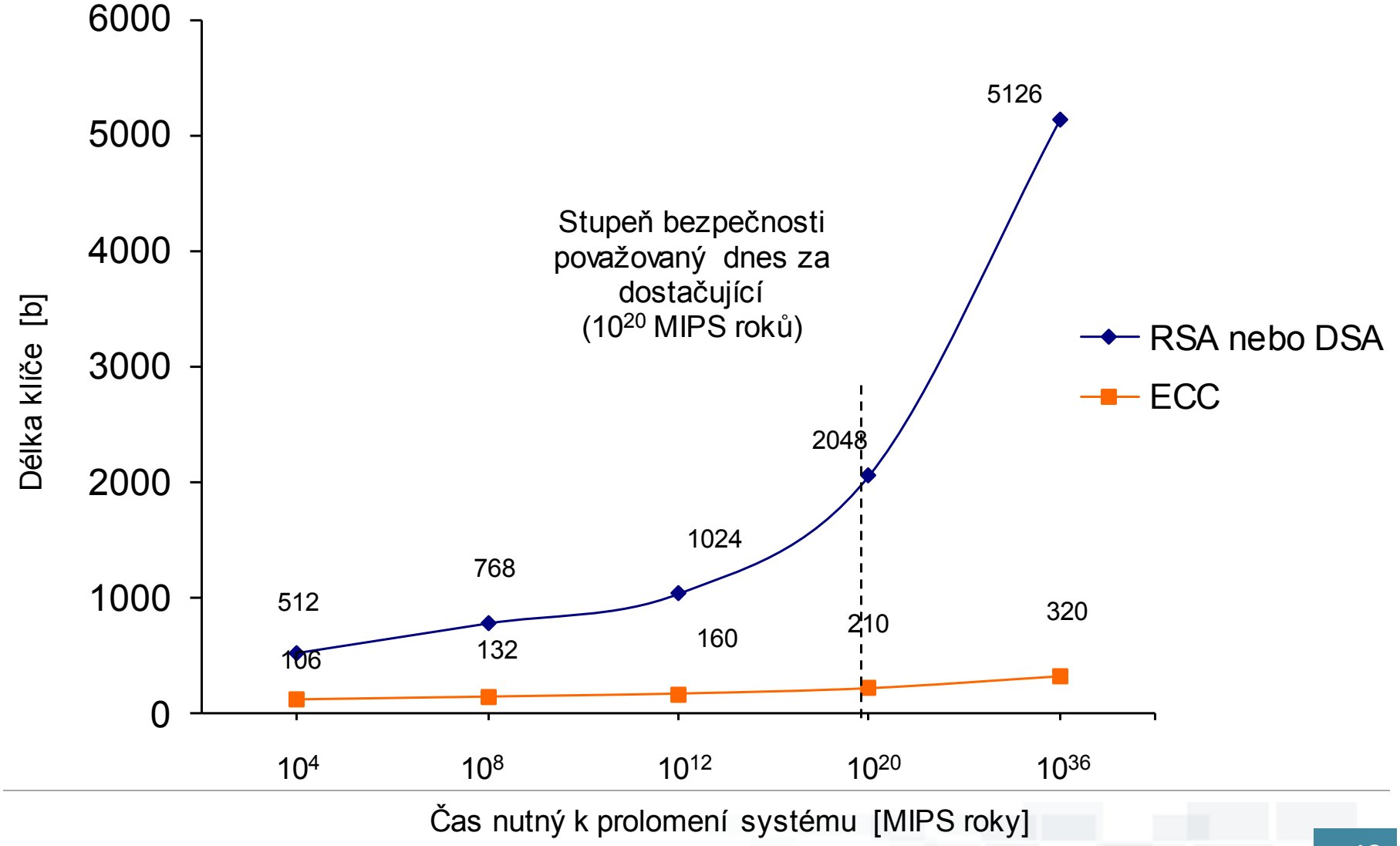
- Pro speciální třídy křivek - supersingulární
  - anomální

  lze problém ECDLP převést na DLP a pro něj existují „rychlé“ algoritmy (řešitelné v sub-exponenciálním čase)

- Použití těchto typů křivek je v příslušných doporučeních zakázáno.

- Pro obecné EC dnes nejsou známy žádné algoritmy s subexponenciální časovou složitostí, nejlepší algoritmy mají plně exponenciální složitost.
- V současné době ECDLP podstatně obtížněji řešitelný než DLP.

Bezpečnost – srovnání IFP, DLP a ECDLP



Bezpečnost – srovnání IFP, DLP a ECDLP

Srovnání růstu velikosti klíčů u ECC a RSA (DSA) při ekvivalentní úrovni bezpečnosti

Čas nutný k prolomení [MIPS roky]	RSA (DSA) velikost klíče [b]	ECC velikost klíče [b]	RSA/ECC poměr velikosti klíčů
10^{4}	**512**	**106**	**5 : 1**
10^{8}	**768**	**132**	**6 : 1**
10^{11}	**1,024**	**160**	**7 : 1**
10^{20}	**2,048**	**210**	**10 : 1**
10^{78}	**21,000**	**600**	**35 : 1**

Srovnatelná bezpečnost různých typů kryptosystémů pro různé délky klíčů [b]

Symetrické šifry	ECDLP	IFP/DLP	Bezpečnost
56	112	512	**NEBEZPEČNÉ** - dnes již dokážeme luštit
64	128	768	**Krátkodobá bezpečnost** (do 5-10 letech půjde luštit; jsou publikovány úspěšné pokusy o prolomení)
80	163	1024	
112	231	2048	**Dlouhodobá bezpečnost** - pokud nedojde k novým zásadním objevům nebo konstrukci kvantového počítače
128	283	3072	
192	409	7680	
256	571	15360	

Největší EC, pro které se povedl vyřešit ECDLP

Délka [b]	Typ [Prime/Binary]	Vyřešeno
79	Prime	12/1997
79	Binary	12/1997
89	Prime	01/1998
89	Binary	02/1998
97	Prime	03/1998
95	Binary	05/1998
97	Binary	09/1999
108	Binary	04/2000
109	Prime	11/2002
109	Binary	4/2004
131	P/B	?

Suite B – co to je

- „doporučení“ pro bezpečné sdílení informací v mezinárodním měřítku z dílny NSA, NIST a NATO
- Suite-B algoritmy jsou určeny pro šifrování klasifikovaných informací*, ale samotné algoritmy nejsou tajné a jsou volně dostupné
- publikován 16.3.2005
- obsahuje tři základní komponenty:
  - asymetrické algoritmy na bázi ECC
  - symetrický algoritmus AES
  - hashovací funkce z rodiny SHA-2

http://www.nsa.gov/ia/programs/suiteb_cryptography/

* Confidental, Secret, TopSecret

Suite B – co to je

- NIST definoval několik množin EC z nichž nejdůležitější jsou ty které generuje rovnice

$$Y^2 = x^3 - 3x + b \pmod{p}$$

- Tři nejdůležitější křivky z podložního pole F_p jsou:
  - P-256, s délkou modulu 256 bitů, (bezpečnost je ekvivalentní s AES-128)
  - P-384, s délkou modulu 384 bitů, (bezpečnost je ekvivalentní s AES-192)
  - P-512, s délkou modulu 512 bitů, (bezpečnost je ekvivalentní s AES-256)

- Tyto tři křivky tvoří základ algoritmů skupiny „Suite B“

Suite B – algoritmy

- Šifrování - AES (FIPS 197)
  - AES-128 až do úrovně SECRET
  - AES-256 až do úrovně TOP SECRET
- Elektronický podpis (FIPS 186-3)
  - ECDSA s prvočísleným modulem délky 256 bitů až do úrovně SECRET
  - ECDSA s prvočísleným modulem délky 384 bitů až do úrovně TOP SECRET
- Výměna klíčů (NIST SP 800-56A)
  - ECDH s prvočísleným modulem délky 256 bitů až do úrovně SECRET
  - ECDH s prvočísleným modulem délky 384 bitů až do úrovně až do úrovně TOP SECRET
- Hashovací funkce (FIPS 180-2)
  - SHA-256 do úrovně SECRET
  - SHA-384 do úrovně TOP SECRET

Standardy a doporučení týkající se ECC

- IEEE P1363: Standard Specifications for Public Key Cryptography
- ANSI X9.62: The Elliptic Curve Digital Signature Algorithm
- ANSI X9.63: Key Agreement and Key Management Using ECC
- PKCS #13: Elliptic Curve Cryptography Standard
- Internet X.509 Public Key Infrastructure Representation of ECDSA Keys and Signatures in Internet X.509 Public Key Infrastructure Certificates,
- ISO/IEC 15946 Information technology - Security techniques - Cryptographic techniques based on elliptic curves

Dotazy